KODE MAT. 12

BARISAN DAN DERET

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT.12

Barisan dan Deret

$$U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$$

$$U_n = a + (n-1)b$$

$$U_1 + U_2 + \ldots, U_n + \ldots$$

n ? ?

$$S_n = ?$$

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kode MAT. 12

Barisan dan Deret

Penyusun:

Dr. Manuharawati, MS.

Editor:
Drs. Mega Teguh Budiyanto, M.Pd.
Dra. Kusrini, M.Pd.

BAGIAN PROYEK PENGEMBANGAN KURIKULUM
DIREKTORAT PENDIDIKAN MENENGAH KEJURUAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
2004

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas karunia dan hidayah-Nya, kami dapat menyusun bahan ajar modul manual untuk SMK Bidang Adaptif, yakni mata pelajaran Fisika, Kimia dan Matematika. Modul yang disusun ini menggunakan pendekatan pembelajaran berdasarkan kompetensi, sebagai konsekuensi logis dari Kurikulum SMK Edisi 2004 yang menggunakan pendekatan kompetensi *(CBT: Competency Based Training).*

Sumber dan bahan ajar pokok Kurikulum SMK Edisi 2004 adalah modul, baik modul manual maupun interaktif dengan mengacu pada Standar Kompetensi Nasional (SKN) atau standarisasi pada dunia kerja dan industri. Dengan modul ini, diharapkan digunakan sebagai sumber belajar pokok oleh peserta diklat untuk mencapai kompetensi kerja standar yang diharapkan dunia kerja dan industri.

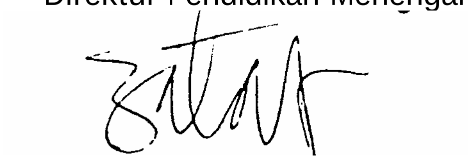
Modul ini disusun melalui beberapa tahapan proses, yakni mulai dari penyiapan materi modul, penyusunan naskah secara tertulis, kemudian disetting dengan bantuan alat-alat komputer, serta divalidasi dan diujicobakan empirik secara terbatas. Validasi dilakukan dengan teknik telaah ahli (*expert-judgment*), sementara ujicoba empirik dilakukan pada beberapa peserta diklat SMK. Harapannya, modul yang telah disusun ini merupakan bahan dan sumber belajar yang berbobot untuk membekali peserta diklat kompetensi kerja yang diharapkan. Namun demikian, karena dinamika perubahan sain dan teknologi di industri begitu cepat terjadi, maka modul ini masih akan selalu dimintakan masukan untuk bahan perbaikan atau direvisi agar supaya selalu relevan dengan kondisi lapangan.

Pekerjaan berat ini dapat terselesaikan, tentu dengan banyaknya dukungan dan bantuan dari berbagai pihak yang perlu diberikan penghargaan dan ucapan terima kasih. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini tidak berlebihan bilamana disampaikan rasa terima kasih dan penghargaan yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak, terutama tim penyusun modul (penulis, editor, tenaga komputerisasi modul, tenaga ahli desain grafis) atas dedikasi, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyelesaikan penyusunan modul ini.

Kami mengharapkan saran dan kritik dari para pakar di bidang psikologi, praktisi dunia usaha dan industri, dan pakar akademik sebagai bahan untuk melakukan peningkatan kualitas modul. Diharapkan para pemakai berpegang pada azas keterlaksanaan, kesesuaian dan fleksibilitas, dengan mengacu pada perkembangan IPTEK pada dunia usaha dan industri dan potensi SMK dan dukungan dunia usaha industri dalam rangka membekali kompetensi yang terstandar pada peserta diklat.

Demikian, semoga modul ini dapat bermanfaat bagi kita semua, khususnya peserta diklat SMK Bidang Adaptif untuk mata pelajaran Matematika, Fisika, Kimia, atau praktisi yang sedang mengembangkan modul pembelajaran untuk SMK.

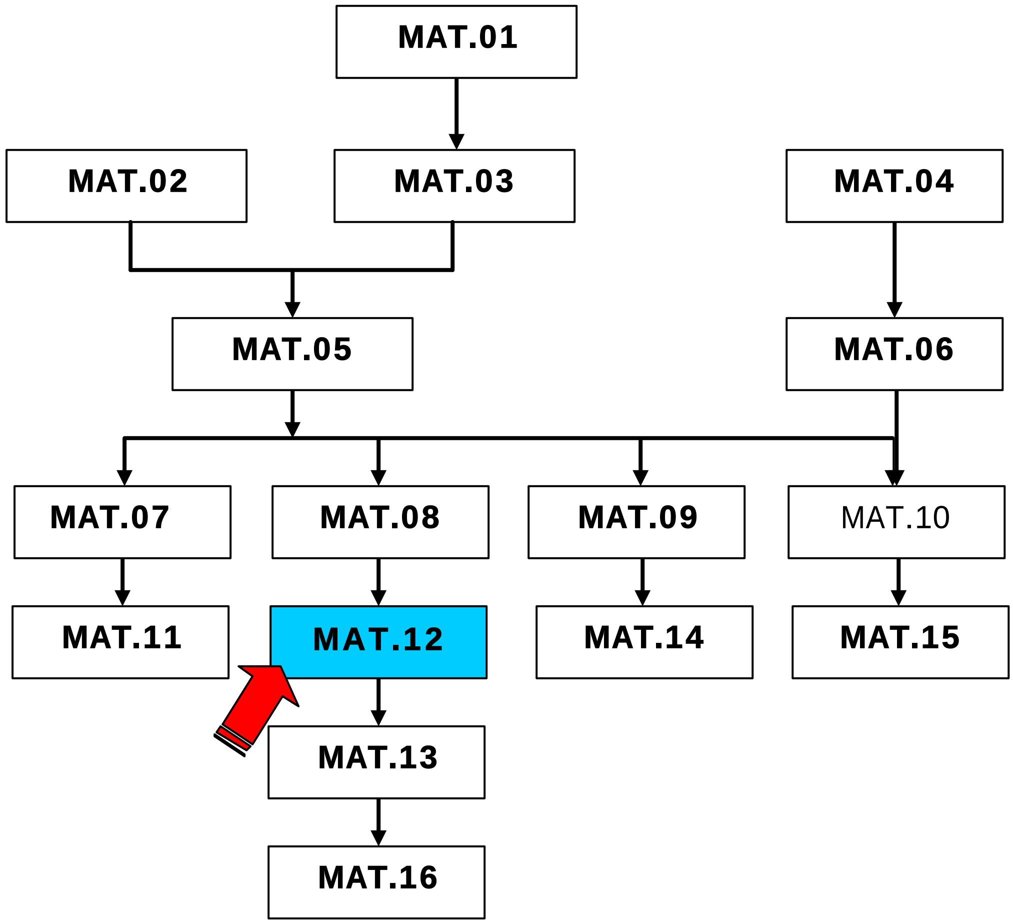
Jakarta, Desember 2004
a. n. Direktur Jenderal Pendidikan
Dasar dan Menengah
Direktur Pendidikan Menengah Kejuruan,



Dr. Ir. Gatot Hari Priowirjanto, M. Sc.
NIP 130 675 814

DAFTAR ISI

PETA KEDUDUKAN MODUL



Daftar Judul Modul

No.	Kode Modul	Judul Modul
1	MAT.01	Matrik
2	MAT.02	Logika Matematika
3	MAT.03	Persamaan dan Pertidaksamaan
4	MAT.04	Geometri Dimensi Dua
5	MAT.05	Relasi Dan Fungsi
6	MAT.06	Geometri Dimensi Tiga
7	MAT.07	Peluang
8	MAT.08	Bilangan Real
9	MAT.09	Trigonometri
10	MAT.10	Irisan Kerucut
11	MAT.11	Statistika
12	MAT.12	Barisan
13	MAT.13	Aproksimasi Kesalahan
14	MAT.14	ProgramLinier
15	MAT.15	Vektor
16	MAT.16	Matematika Keuangan

Glossary

ISTILAH	KETERANGAN
Barisan bilangan real	adalah suatu fungsi dengan domain himpunan semua bilangan asli (?) dan kodomain himpunan semua bilangan real (?). Jika U merupakan fungsi dari ? ke ?, maka barisannya sering ditulis dengan U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... Pada barisan U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... , U_n disebut **unsur** ke n atau **elemen** ke n dari barisan itu.
Sigma	Jumlahan bilangan-bilangan dari deretan bilangan yang mempunyai pola dapat dituliskan dengan notasi ? (dibaca: **sigma**).
Unsur atau elemen	Pada barisan U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ..., U_n disebut **unsur** ke n atau **elemen** ke n dari barisan itu.
Deret dan suku	Jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... merupakan barisan bilangan real, maka $U_1 + U_2 + U_3, ... + U_n + ...$ disebut **deret**, dan U_n disebut **suku** ke n barisan itu.
Barisan aritmatika	Barisan U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... disebut barisan aritmatika jika U_n - $U_{n\text{-}1}$ = konstan. U_n disebut unsur ke n barisan itu, dan konstanta tersebut disebut beda, yang dinotasikan dengan b.
Deret aritmatika	Jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... merupakan barisan aritmatka, maka $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n$, ... disebut **deret aritmatika**. U_n disebut suku ke n dari deret itu.
Barisan geometri dan rasio	Barisan U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... disebut **barisan geometri** jika $\frac{U_n}{U_{n?1}}$ = konstan, dengan n = 2, 2, 3, ... Konstanta pada barisan geometri di atas disebut **rasio** dari barisan itu dan sering dinotasikan dengan r.
Deret geometri	Jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n, ... merupakan barisan geometri dengan unsur pertama adalah $a = U_1$ dan rasio r, maka $U_1 + U_2 + U_3 + ... + U_n + ...$ disebut **deret geometri** dengan $U_n = ar$.

BAB I. PENDAHULUAN

A. Deskripsi

Dalam modul ini, anda akan mempelajari pola bilangan, barisan, dan deret diidentifikasi berdasarkan ciri-cirinya. Notasi sigma dan penggunaannya dalam menyederhanakan penulisan suatu deret. Barisan dan deret aritmatika diidentifikasikan berdasarkan ciri-cirinya, nilai unsur ke n suatu barisan aritmatika ditentukan dengan menggunakan rumus, jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika ditentukan dengan menggunakan rumus. Barisan dan deret geometri diidentifikasikan berdasarkan ciri-cirinya, nilai unsur ke n suatu barisan geometri ditentukan dengan menggunakan rumus, jumlah n suku pertama suatu deret geometri ditentukan dengan menggunakan rumus, jumlah takhingga deret geometri ditentukan dengan menggunakan rumus.

B. Prasyarat

Agar dapat mempelajari modul ini anda harus telah memahami operasi pada bilangan real.

C. Petunjuk Penggunaan Modul

1. Pelajari daftar isi serta skema kedudukan modul dengan cermat dan teliti. Karena dalam skema modul akan nampak kedudukan modul yang sedang Anda pelajari ini di antara modul-modul yang lain.
2. Perhatikan langkah-langkah dalam setiap contoh sehingga mempermudah dalam memahami konsep pola bilangan, barisan maupun deret.
3. Apabila ada soal latihan, kerjakanlah soal-soal tersebut sebagai latihan untuk persiapan evaluasi.

4. Jawablah tes formatif dengan jelas sesuai dengan kemampuan Anda. Jika Anda masih ragu-ragu dengan jawaban yang Anda peroleh, Anda bisa melihat kunci jawaban formatif yang sesuai.
5. Kerjakan soal-soal yang ada pada evaluasi.

D. Tujuan Akhir

Setelah mempelajari modul ini diharapkan Anda dapat:

1. memahami pola bilangan, barisan, dan deret.
2. memahami notasi sigma dan penggunaannya dalam menyederhanakan penulisan suatu deret.
3. memahami barisan dan deret aritmatika.
4. menentukan unsur ke n suatu barisan aritmatika dengan menggunakan rumus.
5. menentukan jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika dengan menggunakan rumus.
6. memahami barisan dan deret geometri.
7. menentukan unsur ke n suatu barisan geometri dengan menggunakan rumus.
8. menentukan jumlah n suku pertama suatu deret geometri dengan menggunakan rumus.
9. menentukan jumlah takhingga deret geometri dengan menggunakan rumus.

E. Kompetensi

KOMPETENSI : BARISAN DAN DERET
PROGRAM KEAHLIAN : program adaptif
KODE : MATEMATIKA/MAT 12
DURASI PEMBELAJARAN : 30 Jam @ 45 menit

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
1. Mengidentifikasi pola bilangan, barisan dan deret.	- Pola bilangan, barisan, dan deret diidentifikasikan berdasarkan ciri-cirinya. - Notasi sigma digunakan untuk menyederhanakan suatu deret.	- Pola bilangan, barisan, dan deret. - Notasi sigma.	- Tepat menggunakan rumus dalam menyelesaikan permasalahan barisan dan deret.	- Pola bilangan, barisan, dan deret. - Notasi sigma.	- Menunjukkan pola bilangan dari suatu barisan dan deret. - Menggunakan notasi sigma.
2. Menerapkan konsep barisan dan deret aritmatika.	- Barisan dan deret aritmatika dideskripsikan berdasarkan cirinya. - Nilai suku ke-n suatu barisan aritmatika ditentukan menggunakan rumus. - Jumlah n suku suatu deret aritmatika ditentukan dengan menggunakan rumus.	- Barisan dan deret aritmatika. - Suku ke n suatu barisan aritmatika. - Jumlah n suku suatu deret aritmatika.	- Tepat menggunakan rumus dalam menyelesaikan permasalahan barisan dan deret.	- Barisan dan deret aritmatika. - Suku ke n suatu barisan aritmatika. - Jumlah n suku suatu deret aritmatika.	

SUB KOMPETENSI	KRITERIA KINERJA	LINGKUP BELAJAR	MATERI POKOK PEMBELAJARAN		
			SIKAP	PENGETAHUAN	KETERAMPILAN
3. Menerapkan konsep barisan dan deret geometri.	- Barisan dan deret geometri dideskripsikan berdasarkan cirinya. - Nilai suku ke-n suatu barisan geometri ditentukan menggunakan rumus. - Jumlah n suku suatu deret geometri ditentukan dengan menggunakan rumus. - Jumlah tak hingga suatu deret geometri ditentukan dengan menggunakan rumus.	- Barisan dan deret geometri. - Suku ke n suatu barisan geometri. - Jumlah n suku suatu deret geometri. - Deret geometri tak hingga.	- Tepat menggunakan rumus dalam menyelesaikan permasalahan barisan dan deret.	- Barisan dan deret geometri. - Suku ke n suatu barisan geometri. - Jumlah n suku deret geometri. - Deret geometri tak hingga.	

F. Cek kemampuan

1) Tuliskan pengertian tentang:
   - ☞ Barisan aritmatika
   - ☞ Barisan geometri
   - ☞ Deret aritmatika
   - ☞ Deret geometri
2) Tuliskan rumus umum:
   - ☞ Unsur ke n barisan aritmatika
   - ☞ Jumlah n suku pertama deret aritmatika
   - ☞ Jumlah n suku pertama deret geometri.
3) Unsur ke n suatu barisan aritmatika adalah 12 dan unsur ke $n+3$ adalah 95. Tentukan unsur ke $n+4$ dari barisan tersebut.
4) Tentukan jumlah semua bilangan asli yang terdiri dari dua angka dan habis dibagi lima.

BAB II. PEMBELAJARAN

A. RENCANA BELAJAR SISWA

Kompetensi : Menerapkan konsep baris dan deret.
Sub Kompetensi :
- Mengidentifikasi pola bilangan, barisan dan deret.
- Menerapkan konsep barisan dan deret aritmatika.
- Menerapkan konsep barisan dan deret geometri.

Tulislah semua jenis kegiatan yang Anda lakukan di dalam tabel kegiatan di bawah ini. Jika ada perubahan dari rencana semula, berilah alasannya kemudian meminta tanda tangan kepada guru atau instruktur Anda.

Jenis Kegiatan	Tanggal	Waktu	Tempat Belajar	Alasan perubahan	Tandatangan Guru

B. KEGIATAN BELAJAR

1. Kegiatan Belajar 1

Pola Bilangan, Barisan, Deret dan Notasi Sigma

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar ini, diharapkan anda dapat:

- ✍ menentukan pola suatu deretan bilangan,
- ✍ menentukan unsur ke *n* suatu barisan berdasarkan sifat/pola yang dimiliki,
- ✍ menentukan *n* unsur pertama suatu barisan jika rumus unsur ke *n* barisan itu diketahui,
- ✍ menentukan suku ke *n* suatu barisan berdasarkan sifat/pola yang dimiliki oleh barisan yang terkait,
- ✍ menentukan *n* suku pertama suatu deret jika rumus suku ke *n* deret itu diketahui,
- ✍ menyatakan suatu penjumlahan dengan menggunakan notasi sigma,
- ✍ menentukan nilai penjumlahan yang dinyatakan dalam notasi sigma,
- ✍ memahami beberapa sifat pada notasi sigma.

b. Uraian Materi

Perhatikan deretan bilangan-bilangan berikut:

a. 1 2 3 …

b. 4 9 16 …

c. 31 40 21 30 16 …

Deretan bilangan di atas mempunyai pola tertentu. Dapatkah anda menentukan bilangan yang belum diketahui sesuai dengan aturan yang dipunyai?

Pada a, bilangan ke 4 adalah 4, sebab deretan bilangan nomor 1, mempunyai aturan: bilangan ke 2 = 1 + 1 = 2, bilangan ke 3 = bilangan ke 2 + 1 = 2 + 1 = 3. Jadi bilangan ke 4 = bilangan ke 3 + 1 = 3 + 1 = 4.

Pada b, bilangan ke 4 adalah 25, sebab deretan bilangan nomor 2, mempunyai aturan: bilangan ke 1 = $(1 + 1)^2 = 2^2 = 4$, bilangan ke 2 = $(2 + 1)^2 = 3^2 = 9$, bilangan ke 3 = $(3 + 1)^2 = 4^2 = 16$. Jadi bilangan ke 4 = $(4 + 1)^2 = 5^2 = 25$.

Pada c, bilangan ke 6 adalah 25, sebab deretan bilangan nomor 3, mempunyai aturan: bilangan ke 3 = bilangan pertama - 10 = 31 - 10 = 21, bilangan ke 4 = bilangan ke 2 - 10 = 40 - 10 = 30, bilangan ke 5 = bilangan ke 3 - 5 = 21 - 5 = 16,. Jadi bilangan ke 6 = bilangan ke 4 - 5 = 30 - 5 = 25.

Aturan yang dimiliki oleh deretan bilangan di atas disebut **pola bilangan** pada deretan itu. Pola sebuah deretan bilangan tidak tunggal. Sebagai contoh, pada deretan bilangan nomor 2, bilangan ke $n = (n + 1)^2$ dengan $n = 1, 2, 3, 4$.

Selanjutnya kita akan membicarakan deretan bilangan dengan pola khusus yang disebut barisan dan deret.

Definisi

Barisan bilangan real adalah suatu fungsi dengan domain himpunan semua bilangan asli (?) dan kodomain himpunan semua bilangan real (?). Jika U merupakan fungsi dari ? ke ?, maka barisannya sering ditulis dengan U_1, U_2, U_3, …, U_n, …. Pada barisan U_1, U_2, U_3, …, U_n, … , U_n disebut **unsur** ke n atau **elemen** ke n dari barisan itu.

Contoh 1.1

1. 1, 2, 3,... merupakan barisan dengan unsur ke n dari barisan itu adalah $U_n = n$.
2. 1, -1, 1, -1,.... adalah barisan dengan unsur ke n dari barisan itu adalah $U_n = (-1)^n$.
3. 4, 9, 16,... adalah barisan dengan unsur ke n dari barisan itu adalah $U_n = (n + 1)^2$.

4. Unsur ke n dari barisan adalah $U_n = 3 - 2n$. Lima unsur pertama dari barisan itu adalah 1, -1, 0, -5, -7.

5. Unsur ke n dari barisan adalah $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Barisan itu adalah $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$,....

Definisi

Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ merupakan barisan bilangan real, maka

$$U_1 + U_2 + U_3, \ldots + U_n + \ldots$$

disebut **deret**, dan U_n disebut **suku** ke n barisan itu.

Contoh 1.2

1) 1 + 2 + 3 +…, maka suku ke n barisan itu adalah $U_n = n$.
2) 1 + (-1) + 1+ (-1) + …., maka suku ke n dari deret itu adalah $U_n = (-1)^n$.
3) 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 +…, maka ke 7 dari barisan itu adalah 13.
4) Jika suku ke n suatu barisan adalah $U_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, maka barisannya adalah

   $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots.$

Notasi Sigma

Perhatikan jumlahan bilangan-bilangan berikut.

1. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.
2. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12.
3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}$.
4. 1 + 3 + 5 + 7 + 9.

Jumlahan bilangan-bilangan dari deretan bilangan yang mempunyai pola dapat dituliskan dengan notasi ? (dibaca: **sigma**).

Contoh 1.3

Tuliskan jumlahan berikut dengan menggunakan notasi Σ

1. 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
2. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12
3. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$
4. 1 + 3 + 5 + 7 + 9
5. $U_1 + U_2 + U_3, \ldots + U_n + \ldots$

Hitunglah hasil jumlahan berikut

6. $\sum_{i=1}^{3} (3i + 2)$
7. $\sum_{i=1}^{4} i^2 + 51$

Penyelesaian:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \sum_{i=1}^{7} i$.
2. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = \sum_{i=1}^{6} 2i$.
3. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16} = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{1}{3}\right)^i$.
4. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \sum_{i=1}^{5} (i\ ?\ 1)$.
5. $U_1 + U_2 + U_3, \ldots + U_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$
6. $\sum_{i=1}^{3} (3i + 2) = (3.1 + 2) + (3.2 + 2) + (3.3 + 2) = 5 + 8 + 11 = 24.$
7. $\sum_{i=1}^{4} i^2 + 5i = (1^2 + 5.1) + (2^2 + 5.2) + (3^2 + 5.3) + (4^2 + 5.4)$

   $= 6 + 14 + 24 + 36 = 80.$

Beberapa sifat notasi sigma

1. Jika c merupakan bilangan real, maka

$$\sum_{i=1}^{k} c = kc.$$

2. $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{k} a_j$

3. Jika c merupakan bilangan real, maka

$$\sum_{i=1}^{k} ca_i = c\sum_{i=1}^{k} a_i .$$

4. $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i$

6. Jika n merupakan bilangan asli, maka

$$\sum_{i=n}^{n} a_i = a_n.$$

<u>Contoh 1. 4</u>

Buktikan kebenaran sifat:

1. $\sum_{i=1}^{k} c = kc.$

2. $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{k} a_j$

<u>Penyelesaian:</u>

1. $\sum_{i=1}^{k} c = c + c + c + \ldots + c$ sebanyak k suku

   Jadi $\sum_{i=1}^{k} c = kc.$

2. $\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \ldots. + a_k$

   $\sum_{j=1}^{k} a_j = a_1 + a_2 + \ldots. + a_k$

   Jadi $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{k} a_j .$

c. Rangkuman 1

- Aturan yang dimiliki oleh deretan bilangan disebut **pola bilangan** pada deretan itu.
- **Barisan bilangan real** adalah suatu fungsi dengan domain himpunan semua bilangan asli (N) dan kodomain himpunan semua bilangan real (R). Jika U merupakan fungsi dari N ke R, maka barisannya sering ditulis dengan U_1, U_2, U_3,..., U_n,.... Pada barisan U_1, U_2, U_3,..., U_n,..., U_n disebut **unsur** ke n atau **elemen** ke n dari barisan itu.
- Jika U_1, U_2, U_3,..., U_n,... merupakan barisan bilangan real, maka $U_1 + U_2 + U_3$,... $+ U_n$ +... disebut **deret**, dan U_n disebut **suku** ke n barisan itu.
- Jumlahan bilangan-bilangan dari deretan bilangan yang mempunyai pola dapat dituliskan dengan notasi $\sum$ (dibaca: **sigma**).
- Beberapa sifat notasi sigma

  a. Jika c merupakan bilangan real, maka $\sum_{i=1}^{k} c = kc$.

  b. $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{j=1}^{k} a_j$

  c. Jika c merupakan bilangan real, maka $\sum_{i=1}^{k} ca_i = c\sum_{i=1}^{k} a_i$.

  d. $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i$

  e. Jika n merupakan bilangan asli, maka $\sum_{i=n}^{n} a_i = a_n$.

d. Tugas 1

1. Buatkan contoh deretan bilangan yang berpola, dan tuliskan polanya.
2. Buktikan bahwa:

   a. Jika *c* merupakan bilangan real, maka $\sum_{i=1}^{k} ca_i = c\sum_{i=1}^{k} a_i$.

   b. $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i$

   c. Jika *n* merupakan bilangan asli, maka $\sum_{i=n}^{n} a_i = a_n$.

3. Hitunglah jumlahan berikut.

   a. $\sum_{i=1}^{10} 2i(i ? 5)$

   b. $\sum_{i=1}^{10} (i^4 ? 1)$.

4. Tentukan lima unsur pertama dari barisan yang rumus unsur ke *n* dari barisan itu adalah

   a. $U_n = (3 + n)$

   b. $U_n = 3 + n + n^2$

5. Tentukan rumus suku ke *n* dari deret berikut.

   a. 5 + 3 + 1 + (-1) + (-3) + ...

   b. 3 + (-3) + 3 + (-3) + 3 + ...

e. Tes Formatif 1

Tentukan bilangan yang belum diketahui dalam setiap deretan bilangan berikut sesuai dengan pola yang dimiliki.

1. $\frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16}$ ....
2. 1 1 2 3 5 8 …

Tentukan lima unsur pertama suatu barisan jika:

3. $U_n = 5n + 3$.
4. $U_n = -n + 1$.
5. *Tuliskan deret yang dibentuk oleh barisan dengan unsur ke n nya adalah*

   $U_n = \sqrt{2 ? n} + 5$.

6. *Tentukan suku ke n dari deret*:

$-3 + \sqrt{5} + (3 + \sqrt{5}), (-3 + \sqrt{5}), (3 + \sqrt{5})$, ...

7. *Tentukan unsur ke n dari barisan*

   2, 5, 8, 15, 24, ...

8. *Tentukan nilai dari* $\underset{i?3}{\overset{5}{?}} (i ? 1)^3$

9. *Tuliskan deret berikut dengan menggunakan notasi sigma*

   1 + 4 + 7 + 14 + ...

10. *Buktikan kebenaran sifat*: $\underset{i?1}{\overset{k}{?}} (a_i ? b_i) = \underset{i?1}{\overset{k}{?}} a_i + \underset{i?1}{\overset{k}{?}} b_i$ jika $a_i = i^2$,

    $b_i = i$, dan $k = 4$.

f. Kunci Tes Formatif 1

1. $\frac{1}{25}$
2. 13.
3. $U_n = 5n + 3$, maka lima unsur pertama dari barisannya adalah:

   $U_1 = 5.1 + 3 = 8$,

   $U_2 = 5.2 + 3 = 13$,

   $U_3 = 5.3 + 3 = 18$,

   $U_4 = 5.4 + 3 = 23$,

   $U_5 = 5.\ 5 + 3 = 28$.

4. $U_n = -n + 1$. maka lima unsur pertama dari barisannya adalah:

   $U_1 = -1 + 1 = 0$,

U_2 = -2+ 1 = -1,

U_3 = -3 + 1 = -2,

U_4 = -4 + 1 = -3,

U_5 = -5 + 1 = -4.

5. Deret yang dibentuk oleh barisan dengan unsur ke *n* nya adalah

   U_n = $\sqrt{2 ? n}$ + 5 adalah ($\sqrt{3}$ + 5) + ($\sqrt{4}$ + 5) + ($\sqrt{5}$ + 5) + ...

6. Suku ke *n* dari deret:

   -3 +$\sqrt{5}$ +(3 + $\sqrt{5}$), (-3 + $\sqrt{5}$), (3 + $\sqrt{5}$), ... adalah U_n = $(3)(-1)^n$ + $\sqrt{5}$.

7. Unsur ke *n* dari barisan

   2, 5, 8, 15, 24, ... adalah $U_n = 3n – 1$.

8. $\sum_{i=3}^{5} (i - 1)^3$ = $(3 - 1)^2 + (4 - 1)^2 + (5 - 1)^2$ = 4 + 9 + 16 = 29.

9. Tuliskan deret berikut dengan menggunakan notasi sigma

   1 + 4 + 7 + 14 + ... = $\sum_{n=1}^{\infty} (3n - 2)$

10. Bukti:

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{4} (i^2 + i)$$

$$= (1^2 + 1) + (2^2 + 2) + (3^2 +3) + (4^2 + 4)$$

$$= 2 + 6 + 12 + 20$$

$$= 40.$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{4} i$$

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= (1 + 4 + 9 + 16) + (10)$$

$$= 30 + 10$$

$$= 40.$$

Jadi terbukti bahwa: $\sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=1}^{k} b_i$ jika $a_i = i^2$, $b_i = i$,

dan $k = 4$.

2. Kegiatan Belajar 2:

Barisan Aritmatika dan Deret Aritmatika

a. Tujuan Kegiatan pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar 2, diharapkan Anda dapat:

- ✍ memahami barisan aritmatika,
- ✍ menentukan unsur ke n suatu barisan aritmatika,
- ✍ memahami deret aritmatika,
- ✍ menentukan jumlah n suku pertama deret aritmatika.

b. Uraian Materi

Kadang-kadang, suatu barisan mempunyai pola khusus. Pada barisan 1, 2, 3, 4, ..., selisih antara unsur yang berurutan, yaitu: ke 1 dengan ke 2, ke 2 dengan ke 3, ke n dengan ke $n + 1$, dan seterusnya adalah tetap, yaitu sama dengan 1. Barisan semacam ini disebut **barisan aritmatika**. Secara matematik, pengertian barisan arimatika dapat dituliskan sebagai berikut.

<u>Definisi</u>

Barisan U_1, U_2, U_3,…, U_n,… disebut **barisan aritmatika** jika

$$\boldsymbol{U_n - U_{n-1} = \text{konstan}},$$

dengan $n = 2, 3, 4,\ldots.$ Konstanta pada barisan aritmatika di atas disebut **beda** dari barisan itu dan sering dinotasikan dengan b, dan U_1 sering dinotasikan dengan a.

<u>Contoh 2.1</u>

1. 1, 2, 3,… merupakan barisan aritmatika dengan beda, $b = 1$.
2. 1, 3, 5, ... merupakan barisan aritmatika dengan beda, $b = 2$.
3. 1, -1, 1, -1,…. bukan barisan aritmatika sebab

   $U_2 - U_1 = -1 - 1 = -2 \neq 2 = 1 - (-1) = U_3 - U_2$
4. Diketahui barisan aritmatika dengan unsur ke 2 adalah 10 dan *beda* = 2.

Tentukan unsur ke 1, ke 3, dan ke 4 dari barisan itu.

<u>Penyelesaian:</u>

Karena $b = U_n - U_{n-1} = 2$, maka $U_2 - U_1 = 2$. Jadi $U_1 = U_2 - 2 = 10 - 2 = 8$. Secara sama diperoleh $U_3 - U_2 = 2 = b$. Jadi $U_3 = U_2 + b = 10 + 2 = 12$, dan $U_4 = U_3 + b = 12 + 2 = 14$.

Menurunkan Rumus Unsur *ke n* Barisan Aritmatika

Jika $U_1 = a, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ merupakan barisan aritmatika, maka unsur ke n dari barisan itu dapat diturunkan dengan cara berikut.

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = U_2 + b = (a + b) + b = a + 2b$

$U_4 = U_3 + b = (a + 2b) + b = a + 3b$

$U_5 = U_4 + b = (a + 3b) + b = a + 4b$

$\vdots$

$U_n = a + (n-1)b$

Jadi rumus umum unsur ke *n* suatu barisan aritmatika dengan unsur pertama a dan beda b adalah:

$$\boldsymbol{U_n = a + (n-1)b}$$

<u>Contoh 2.2</u>

Diketahui barisan aritmatika dengan unsur ke 2 adalah 10 dan *beda* = 2. Tentukan unsur ke 7 barisan itu.

<u>Penyelesaian:</u>

Diketahui $U_2 = 10$, $b = 2$. Dengan menggunakan rumus $U_n = a + (n-1)b$, diperoleh

$U_2 = a + (2-1)b$

$U_2 = a + b$

$a = U_2 - b$

$= 10 - 2$

$= 8.$

$U_7 = a + (7\text{-}1)\, b$

$= a + 6\, b$

$= 8 + 6\ (2)$

$= 8 + 12$

$= 20.$

Jadi unsur ke 7 dari barisan adalah 20.

<u>Contoh 2.3</u>

Mulai tahun 2000, Pak Arman mempunyai kebun tebu. Penghasilan kebun tebu Pak Arman pada akhir tahun 2000 adalah Rp 6.000.000,-. Mulai tahun 2001, Pak Arman memupuk kebun tebunya dengan pupuk kandang. Pak Arman memperkirakan bahwa setiap akhir tahun, penghasilan kebun tebunya naik Rp 500.000,-. Berapa perkiraan penghasilan kebun tebu Pak Arman pada akhir tahun 2005?

<u>Penyelesaian:</u>

Misalkan:

a = penghasilan kebun tebu Pak Arman pada akhir tahun 2000.

b = perkiraan kenaikan penghasilan kebun tebu Pak Arman setiap akhir tahun.

P_{2005} = perkiraan penghasilan kebun Pak Arman pada akhir tahu 2005.

Jadi a = Rp 6.000.000,-, b = Rp 500.000,-, dan P_{2005} akan dicari.

Karena perkiraan kenaikan penghasilan kebun tebu Pak Arman setiap akhir tahun adalah tetap, maka untuk menentukan penghasilan kebun Pak Arman pada akhir tahun 2005, kita dapat menerapkan rumus unsur ke n dari barisan aritmatika dengan

$U_1 = a = a$ = Rp 6.000.000,-, b = Rp 500.000.

$P_{2005} = U_6 = a + 5b$

$= 6.000.000 + 5(500.000)$

$= 6.000.000 + 2.500.000$

$= 8.500.000.$

Jadi perkiraan penghasilan kebun tebu Pak Arman pada akhir tahun 2005 adalah Rp 8.500.000,-

Dengan adanya deret aritmatika, kita dapat membentuk barisan yang terkait dengan deret tersebut. Barisan demikian disebut barisan aritmatika.

Definisi

Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots.$ merupakan barisan aritmatka, maka

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n, \ldots.$$

disebut **deret aritmatika**. U_n disebut suku ke n dari deret itu.

Jika S_n menyatakan jumlah n suku pertama deret aritmatika $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n, \ldots.$, maka $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ dapat diturunkan dengan cara sebagai berikut.

$S_n = U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + a$

$S_n = a + (a - b) + (a + 2b) + \ldots + U_n$

________________________________ +

$2S_n = (a + U_n) + (a + U_n) + (a + U_n) + \ldots + (a + U_n)$, sebanyak n suku.

Jadi $2S_n = n(a + U_n)$ atau $S_n = \frac{1}{2} n(a + U_n)$

$$S_n = \frac{1}{2} n[a + (a + (n-1)b]$$

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n-1)b].$$

Sehingga rumus untuk jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika $U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n, \ldots.$ adalah

$$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n-1)b].}$$

Contoh 2.4

Tentukan jumlah 25 suku pertama deret 3 + 6 + 9 +….

Penyelesaian:

Deret 3 + 6 + 9 +…. adalah deret aritmatika dengan a = 3 dan b = 3. Oleh karena itu dengan menggunakan rumus $S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n-1)b]$ diperoleh:

$$S_{25} = \frac{1}{2}(25)\,[2(3) + (25-1)(3)]$$

$$= \frac{25}{2}[6 + 24(3)]$$

$$= \frac{25}{2}(6 + 72)$$

$$= 25\,(39)$$

$$= 975.$$

Jadi jumlah 25 suku pertama dari deret 3 + 6 + 9 +…. adalah 975.

Contoh 2.5

Tentukan jumlah semua bilangan ganjil antara 50 dan 100.

Penyelesaian:

Diketahui a = 51, b = 2, dan U_n = 99.

Untuk mencari jumlah semua bilangan ganjil di antara 50 dan 100, pertama-tama kita cari dulu banyaknya bilangan ganjil di antara 50 dan 100, yaitu n dengan menggunakan rumus:

$$U_n = a + (n - 1)\,b$$

$$99 = 51 + (n - 1)(2)$$

$$99 = 51 + 2n - 2$$

$$99 = 49 + 2n$$

$$2n = 99 - 49$$

$$n = 25.$$

Selanjutnya dengan rumus jumlah n suku pertama suatu barisan aritmatika,

$$S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n-1)b]$$

diperoleh:

$$S_{25} = \frac{1}{2}(25)[2(51) + (25-1)(2)]$$

$= 25(51 + 24)$

$= 25(75)$

$= 1.875.$

Jadi jumlah semua bilangan ganjil antara 50 dan 100 adalah 1.875.

c. Rangkuman 2

? Barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots.$ disebut barisan aritmatika jika $U_n - U_{n-1}$ = konstan. U_n disebut unsur ke n barisan itu, dan konstanta tersebut disebut beda, yang dinotasikan dengan b.

? Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots.$ merupakan barisan aritmatka dengan beda b dan unsur pertama $U_1 = a$, maka rumus unsur ke n dari barisan itu adalah

$$U_n = a + (n - 1)b$$

? Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots.$ merupakan barisan aritmatka, maka

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n, \ldots.$$

disebut **deret aritmatika**. U_n disebut suku ke n dari deret itu.

? Jumlah n suku deret aritmatika dengan beda b dan unsur pertama $U_1 = a$ adalah

$$S_n = \frac{1}{2}\, n[2a + (n -1)b].$$

d. Tugas 2

Kerjakan dengan kelompok Anda soal-soal berikut.

1. Selidiki, apakah barisan di bawah ini merupakan barisan aritmatika?

   a. $\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \ldots..$

   b. $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \ldots..$

2. Tentukan beda dari masing-masing barisan di bawah, dan kemudian tentukan unsur ke 15 dari barisannya.

   a. 3, 7, 11, 15, ...

b. 50, 45, 40, 35, ...

c. 99, 101, 103, 105, ...

3. Tentukan nilai dari:

   a. 2 + 7 + 12 +.... + 297

   b. 30 + 26 + 22 +… + 2.

4. Tentukan x jika:

   a. 100 + 96 + 92 + ... + x = 0.

   b. 1 + 4 + 7 + ... + x = 835.

e. Tes Formatif 2

Selidiki, apakah barisan-barisan berikut merupakan barisan aritmatika?

1. $-\frac{1}{2}$, 3, -12, 48, ...
2. a, $a + x^2$, $a + 2x^2$, $a + 3x^2$, ...

Tentukan unsur ke n dari barisan berikut untuk n yang diketahui.

3. 1, -1, -3, -5,....; n = 15.
4. 4, 8, 12,….; n = 50.

Hitunglah:

5. 30 + 25 + 20 +… + (-40).
6. 2 + 10 + 18 +... + 72.
7. *Suku ke 5 suatu deret aritmatika adalah 22, jumlah suku ke 7 dengan suku ke 2 adalah 39. Tentukan jumlah 5 suku pertamanya.*

Tentukan suku pertama dan beda dari barisan aritmatika yang mempunyai:

8. $U_6 = 5$; $U_{12} = -13$.
9. $U_{13} = 8$; $U_{17} = 48$.
10. $U_7 = 14$; $U_{10} = 20$.

f. Kunci Tes Formatif 2

1. $-\frac{1}{2}$, 3, -12, 48, ... bukan barisan aritmatika sebab

   $U_3 - U_2 = -12 - 3 = -15$? $60 = 48 - (-12) = U_4 - U_3$

2. a, $a + x^2$, $a + 2x^2$, $a + 3x^2$, ... merupakan barisan aritmatika dengan $b = x^2$.

3. $a = 1$, $b = -2$.

   $U_{15} = 1 + (15-1)(-2) = 1 + 14(-2) = 1 - 28 = 27$.

4. $a = 4$, $b = 4$, $n = 50$.

   $U_{50} = 4 + (50-1)(4) = 4 + 49(4) = 4 + 196 = 200$.

5. $a = 30$, $b = -5$, $U_n = -40$

   $U_n = a + (n - 1)b$

   $-40 = 30 + (n - 1)(-5)$

   $-40 = 30 - 5n + 5$

   $n = 15$.

   $S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b]$

   $S_{15} = \frac{1}{2} 15[2(30) + (15 - 1)(-5)]$.

   $S_{15} = \frac{15}{2} (60 - 20)$

   $S_{15} = 15 (10) = 150$

   Jadi $30 + 25 + 20 + \ldots + (-40) = 150$.

6. $a = 2$, $b = 8$, $U_n = 72$

   $U_n = a + (n - 1)b$

   $72 = 2 + (n - 1)(8)$

   $72 = -6 + 8n$

   $n = 9$.

   $S_n = \frac{1}{2} n[2a + (n - 1)b]$

   $S_9 = \frac{1}{2} (9)[2(2) + (9 - 1)(8)]$.

$S_9 = \frac{9}{2}(4 + 64)$

$S_9 = 9\,(34) = 306.$

Jadi $2 + 10 + 18 + \ldots + 72 = 306$.

7. Karena $U_5 = 22$ dan $U_2 + U_7 = 39$, maka

   $a + 4b = 22$.. (*)

   $(a + b) + (a + 6b) = 39$ atau $2a + 7b = 39$ ....(**)

   Dari persamaan (*) dan (**) diperoleh $b = 5$ dan $a = 2$.

   $S_n = \frac{1}{2}\, n[2a + (n - 1)b]$

   $S_5 = \frac{1}{2}(5)[2(2) + (5 - 1)(5)] = 5\,[\,2 + 2\,(5)] = 5\,(12) = 60.$

8. $$\begin{array}{rl} a + 5b &= 5 \\ a + 11b &= -13 \\ \hline -6b &= 18 \\ b &= -3. \end{array} \; -$$

   $a + 5b = 5$

   $a + 5(-3) = 5$

   $a = 20.$

9. $$\begin{array}{rl} a + 12b &= 8 \\ a + 16b &= 48 \\ \hline -8b &= -40 \\ b &= 5.. \end{array} \; -$$

   $a + 12b = 8$

   $a + 12(5) = 8$

   $a = 8 - 60 = -52.$

10. $a + 6b = 14$

$$\begin{array}{r} a + 9b = 20 \\ \hline -3b = -6 \end{array} \;-$$

$b = 2.$

$a + 6b = 14$

$a + 6(2) = 14$

$a = 14 - 12 = 2.$

3. Kegiatan Belajar 3

Barisan Geometri dan Deret Geometri

a. Tujuan Kegiatan Pembelajaran

Setelah mempelajari kegiatan belajar 3, diharapkan Anda dapat:

- ✍ memahami barisan geometri,
- ✍ menentukan unsur ke *n* suatu barisan geometri,
- ✍ memahami deret geometri,
- ✍ menentukan jumlah *n* suku pertama deret geometri,
- ✍ menentukan jumlah deret geometri tak hingga.

b. Uraian Materi

Pada barisan $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, ..., perbandingan antara unsur ke 2 dengan ke 1, ke 3 dengan ke 2, atau ke n +1 dengan ke n adalah tetap, yaitu sama dengan $\frac{1}{3}$. Barisan demikian disebut **barisan geometri**. Secara matematik, barisan aritmatika dapat dituliskan sebagai berikut.

<u>Definisi</u>

Barisan U_1, U_2, U_3,…, U_n,… disebut **barisan geometri** jika

$$\frac{U_n}{U_{n?1}} = \text{konstan},$$

dengan n = 2, 2, 3,…. Konstanta pada barisan geometri di atas disebut **rasio** dari barisan itu dan sering dinotasikan dengan r.

<u>Contoh 3.1</u>

Apakah barisan-barisan berikut merupakan barisan geometri. Jika merupakan barisan geometri, tentukan rasionya.

a. 2, 4, 8, 16, ….

b. 3, 5, 7, 9,…….

Penyelesaian:

a. 2, 4, 8, 16, …. adalah barisan geometri dengan rasio 2, sebab

$$\frac{U_n}{U_{n?1}} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{4} = 2.$$

b. 3, 5, 7, 9,…. bukan deret geometri, sebab $\frac{U_2}{U_1} = \frac{5}{3} ? \frac{7}{5} = \frac{U_3}{U_2}$.

Rumus unsur ke n barisan geometri U_1, U_2, U_3, U_4,…, U_n,…. dengan $U_1 = a$ dan rasio r dapat diturunkan dengan cara berikut.

$U_1 = a$

$U_2 = a\ r$

$U_3 = U_2\ r = (a\ r)r = ar^2$

$U_4 = U_3\ r = (a\ r^2)r = ar^3$

$\vdots$

$U_n = U_{n-1}\ r = ar^{n-1}$

Jadi rumus unsur ke n barisan geometri U_1, U_2, U_3, U_4,…, U_n,…. dengan $U_1 = a$ dan rasio r adalah:

$$\boldsymbol{U_n = ar^{\,n-1}}$$

Contoh 3.2

Diketahui barisan geometri dengan unsur ke 10 barisan itu adalah 3 dan $\frac{U_2}{U_1} = 2$ Tentukan unsur ke 9 dan ke 11 dari barisan.

Penyelesaian:

Karena barisannya adalah barisan geometri, maka $r = \frac{Un ? 1}{Un} = \frac{U_2}{U_1} = 2$.

Jadi $\frac{U_{10}}{U_9} = r = 2$. Akibatnya $U_9 = \frac{U_{10}}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Karena $\frac{U_{11}}{U_{10}} = 2$, maka $U_{11} = 2\ U_{10} = (2)(3) = 6$.

Dengan adanya barisan geometri, kita dapat menentukan deret geometri.

Definisi

Jika U_1, U_2, U_3, ..., U_n,.... merupakan barisan geometri dengan unsur pertama adalah $a = U_1$ dan rasio r, maka

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots.$$

disebut **deret geometri** dengan $U_n = ar$.

Contoh 3.3

a. 3 + 6 + 18 + 54 +..... merupakan deret geometri dengan $a = 3$ dan $r = 3$.

b. 1 + 2 + 4 + 6 + 8 +.... bukan deret geometri, sebab $\frac{2}{1} ? \frac{8}{6}$.

Rumus jumlah n suku pertama deret geometri dengan suku pertama a dan rasio r, dapat diturunkan dengan cara sebagai berikut.

Misalkan $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$, maka

$S_n = a + ar^2 + ar^3 + \ldots.. + ar^{n-1}$

$r\,S_n = ar + ar^3 + ar^4 + \ldots.. + ar^{n-1} + ar^n$

$S_n - r\,S_n = a - ar^n$

$(1 - r)\,S_n = (1 - r^n)a$

$S_n = \dfrac{a(1 ? r^n)}{1 ? r}$.

Jadi rumus jumlah n suku pertama deret geometri dengan suku pertama a dan rasio r adalah

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{a(1 ? r^n)}{1 ? r} \text{ untuk } r < 1 \text{ atau } \boldsymbol{S_n} = \frac{a(r^n ? 1)}{r ? 1} \text{ untuk } r > 1.$$

Contoh 3.4

Tentukan jumlah 6 suku pertama deret 2 + 4 + 8 +......

Penyelesaian:

Deret 2 + 4 + 8 +..... adalah deret geometri dengan $a = 2$ dan $r = 2 > 1$. Jadi

$S_n = \dfrac{a(r^n ? 1)}{r ? 1}$

$$S_6 = \frac{2(2^6 ? 1)}{2 ? 1}$$

$$= \frac{2(64 ? 1)}{1}$$

$$= 2(63)$$

$$= 126.$$

Jadi jumlah 6 suku pertama deret 2 + 4 + 8 +..... adalah 126.

<u>Contoh 3.5</u>

Tentukan jumlah 10 suku pertama deret: 1 - 2 + 4 - 8 +......

<u>Penyelesaian:</u>

Deret 1 - 2 + 4 - 8 +..... adalah deret geometri dengan $a = 1$, $r = -2 < 1$. Dengan menggunakan rumus

$$S_n = \frac{a(1 ? r^n)}{1 ? r},$$

diperoleh:

$$S_{10} = \frac{a(1 ? r^n)}{1 ? r}$$

$$= \frac{1(1 ? (?2)^{10})}{1 ? (?2)}$$

$$= \frac{1 ? 1026}{3}$$

$$= \frac{?1025}{3}$$

$$= -341\frac{2}{3}.$$

Jadi jumlah 10 suku pertama dari deret 1 - 2 + 4 - 8 +..... adalah $-341\frac{2}{3}$.

Pada Contoh 3.4, jika n menuju tak hingga, S_n akan menuju tak hingga, dan pada Contoh 3.5, jika n menuju tak hingga, S_n akan menuju negatip tak hingga. Deret geometri demikian disebut **deret geometri divergen**. Ada kalanya pada sebuah deret geometri, jika n menuju tak hingga, S_n akan menuju ke suatu bilangan real tertentu. Deret-deret demikian disebut **deret geometri konvergen**.

Contoh 3.6

Deret 1 - 2 + 4 - 8 + ..., maka jumlah n suku pertama dari deret itu adalah

$$S_n = \frac{(1 - (-2)^n)}{3}.$$

Jika n menuju tak hingga, maka S_n menuju negatip tak hingga. Jadi deret tersebut merupakan deret geometri yang divergen.

Contoh 3.7

Jumlah n suku pertama deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ adalah

$$S_n = \frac{1(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(1 - (\frac{1}{2})^n)}{\frac{1}{2}}$$

Untuk n menuju tak hingga, maka S_n menuju 2. Jadi deret geometri

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

merupakan deret yang konvergen.

Perhatikan suatu deret geometri dengan rasio r dan suku pertamanya adalah a. Jumlah n suku pertama dari deret itu adalah:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Untuk n menuju tak hingga dan $|r| < 1$, maka r^n mendekati 0. Oleh karena itu untuk n menuju tak hingga dan $|r| < 1$ diperoleh

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}.$$

Contoh 3.8

Tentukan jumlah deret geometri berikut.

$$4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + ...$$

Penyelesaian:

Deret: $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + ...$ adalah deret geometri dengan $a = 4$ dan $r = \frac{1}{2}$ < 1. Jumlah deret geometri itu adalah

$$S_{?} = \frac{a}{1 ? r}$$

$$= \frac{4}{1 ? \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$= 8.$$

c. Rangkuman 3

? Barisan $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots$ disebut **barisan geometri** jika

$$\frac{U_n}{U_{n ? 1}} = \text{konstan},$$

dengan $n = 2, 2, 3, \ldots.$ Konstanta pada barisan geometri di atas disebut **rasio** dari barisan itu dan sering dinotasikan dengan r.

? Rumus unsur ke n barisan geometri $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots, U_n, \ldots.$ dengan $U_1 = a$ dan rasio r adalah:

$$U_n = ar^{n-1}$$

? Jika $U_1, U_2, U_3, \ldots, U_n, \ldots.$ merupakan barisan geometri dengan unsur pertama adalah $a = U_1$ dan rasio r, maka

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots.$$

disebut **deret geometri** dengan $U_n = ar$.

- Rumus jumlah *n* suku pertama deret geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *r* adalah:

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ untuk } r < 1 \text{ atau } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ untuk } r > 1.$$

  Jika *n* menuju tak hingga S_n berhingga, maka deret yang bersangkutan disebut deret konvergen, dan jika tidak demikian disebut deret divergen.

- Jumlah tak hingga suatu deret geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *r* dengan $|r| < 1$ adalah

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}.$$

d. Tugas 3

Apakah barisan berikut merupakan barisan geometri? Beri penjelasan.

1. –20, 40, -80, 160, ...
2. $\frac{1}{4}$, $\frac{-1}{2}$, -1, 2, ...

Tuliskan empat suku pertama dari deret berikut.

3. $U_n = 3^{n-1}$
4. $U_n = 3(-2)^{n-1}$

Tuliskan rumus unsur ke-n dari barisan berikut.

5. 4, 2, 1, ...
6. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

Tentukan jumlah sepuluh suku pertama dari deret:

7. 0,1 + 0,05 + 0,025 + ...
8. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots$

Tentukan jumlah deret berikut.

9. 0,1 + 0,05 + 0,025 + ...
10. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...

e. Tes Formatif 3

Carilah rasio dari setiap barisan geometri berikut, kemudian tentukan rumus unsur ke-n nya.

1. ?2, ?6, 3?2, ...
2. 7, 0,7, 0,07, ...

   Tentukan jumlah lima suku pertamanya.

3. $120 - 20 - \frac{10}{3} - ...$
4. $24 + 3 + \frac{3}{8} + ...$

   Tentukan nilai n jika:

5. $3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = 1092$
6. $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 255$
7. *Diketahui jumlah tak hingga dari deret geometri adalah 8, sedangkan jumlah dari suku-suku genapnya sama dengan 2. Tentukan suku pertama dan rasio dari deret tersebut.*

   Hitunglah:

8. $1 + 2 + 4 + ... + 32$
9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} ... + \frac{1}{128}$
10. Hitunglah $-120 - 20 - \frac{10}{3} - ...$

f. Kunci Tes Formatif 3

1. Rasio = $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ = ?3.

   Rumus unsur ke *n* adalah $U_n = ar^{n-1}$ = ?2 (?3)$^{n-1}$

2. Rasio = $\frac{0,7}{7} = 0,1$.

   Rumus unsur ke *n* adalah $U_n = ar^{n-1} = 7\ (0,1)^{n-1}$.

3. Deret 120 – 20 - $\frac{10}{3}$ - ... adalah deret geometri dengan a = -120 dan r = $\frac{1}{6}$.

Jumlah lima suku pertamanya adalah

$$S_5 = \frac{a(1 ? r^5)}{1 ? r}$$

$$= \frac{?120\,(1 ? (\frac{1}{6})^5)}{\frac{5}{6}}$$

$$= (?120)(\frac{9775}{9776})\,(\frac{6}{5})$$

$$= \frac{?19.450}{648}$$

4. Deret 24 + 3 + $\frac{3}{8}$ + ... merupakan deret geometri dengan a = 24 dan r = $\frac{1}{8}$.

$$S_5 = \frac{a(1 ? r^5)}{1 ? r}$$

$$= \frac{24 ? 1 ? (\frac{1}{8})^5 ?}{1 ? \frac{1}{8}}$$

$$= (24)(\frac{31.167}{31.168})(\frac{8}{7})$$

$$= \frac{5.984.064}{218.176}$$

$$= 27\frac{93.312}{218.176}.$$

5. Deret $3 + 3^2 + ... + 3^n + ...$ adalah deret geometri dengan a = 3, r = 3.

$3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^n = 1092$

$S_{n+1} = 1092$

$$\frac{3(3^{n?1} ? 1)}{2} = 1092$$

$3^{n+2} - 3 = 2184$

$3^n = \frac{2187}{9}$

$3^n = 243.$

Akibatnya n = 5.

6. Deret $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots$ adalah deret geometri dengan $a = 1$, $r = 2$.

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 255.$$

$$S_{n+1} = 255.$$

$$\frac{1(2^{n?1} ? 1)}{2 ? 1} = 255$$

$$2^{n+1} = 256$$

$$2^n = 128.$$

Akibatnya n = 7.

7. Jumlah tak hingga dari deret geometri adalah 8. Jadi

$S_? = 8$

$\frac{a}{1 ? r} = 8$ atau $a = 8\ (1 - r)$ ....(1)

Jumlah suku-suku genapnya adalah 2.

Jadi $U_2 + U_4 + U_6 + \ldots = ar + ar^3 + ar^5 + \ldots = 2$.

$ar + ar^3 + ar^5 + \ldots$ merupakan deret geometri dengan suku pertama ar dan rasio r^2. Akibatnya diperoleh:

$\frac{ar}{1 ? r^2} = 2$ atau $a = \frac{2(1 ? r^2)}{r}$ ....(2)

Dengan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$8(1 - r) = \frac{2(1 ? r^2)}{r}$.

Jadi $r = \frac{1}{3}$ dan $a = 5\frac{1}{3}$.

8. 1 + 2 + 4 +....+ 32 +....Merupakan deret geometri dengan a = 1 dan r =2.

Terlebih dahulu dicari nilai n sehingga U_n = 32.

$(1)(2)^{n-1} = 2^{n-1} = 32$. Akibatnya n = 6.

Jadi 1 + 2 + 4 + ... + 32 = S_6

$$= \frac{1(2^6 ? 1)}{2 ? 1}$$

$$= \frac{2^6}{1}$$

= 64.

9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{128} + \ldots.$ Adalah deret geometri dengan a = 1, $r = \frac{1}{2}$.

Untuk mencari $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{128}$, terlebih dahulu dicari n sehingga

$U_n = \frac{1}{128}$.

$1(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{128}$ atau $(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{64}$.

Akibatnya n = 6.

Oleh karena itu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{128} = S_6$

$$= \frac{1(1 ? (\frac{1}{2})^6)}{1 ? \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 ? \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{63}{64} \times 2$$

$$= \frac{63}{32}$$

$$= 1\frac{31}{32}.$$

10. Deret 120 - 20 - $\frac{10}{3}$ - ... adalah deret geometri dengan a = -120 dan

$$r = \frac{?\,20}{?\,120} ? \frac{?\,\frac{10}{3}}{?\,20} = \frac{1}{6} < 1.$$

Oleh karena itu 120 – 20 - $\frac{10}{3}$ - ... = $S_?$ dengan

$$S_? = \frac{a}{1 ? r}$$

$$= \frac{?\,120}{1 ? \frac{1}{6}}$$

$$= \frac{?\,120}{\frac{5}{6}}$$

$$= (-120)\left(\frac{6}{5}\right)$$

$$= -144.$$

Jadi 120 – 20 - $\frac{10}{3}$ - ... = - 144.

BAB III. EVALUASI

A. SOAL EVALUASI

Kerjakan soal berikut dengan benar!

Lengkapi deretan bilangan berikut berdasarkan pola yang dimiliki.

1. 10, 15, 20, 30, 35, 45, 55, ..., ...
2. –2, -5, 0, 5, 2, -1, 4, 9, 6, ..., ...

Tentukan unsur ke-10 dari barisan dan deret berikut.

3. 1, -2, 3, -4, 5, -6, ...
4. 7 + 2 + 7 + 4 + 7 + 6 + ...

Tentukan rumus unsur ke n dari barisan berikut.

5. 4, 7, 10, 13, ...
6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ...

Tentukan jumlah sepuluh suku pertama dari deret:

7. 100 + 95 + 90 + ...
8. –3 – 6 – 12 – 24 - ...

Hitunglah:

9. $\sum_{i=1}^{4} 2i(i^2 ? 2)$
10. 24 + 3 + $\frac{3}{8}$ + ...

B. KUNCI JAWABAN EVALUASI

1. Dengan mengamati pola bilangan pada: 10, 15, 20, 30, 35, 45, 55, ..., ..., unsur-unsur yang berurutan +5, +5, +10, +5, +5, +10, maka unsur berikutnya adalah 60 diikuti 65.
2. Dengan mengamati pola bilangan pada: –2, -5, 0, 5, 2, -1, 4, 9, 6, ..., ..., unsur-unsur yang berurutan -3, -3, +5, +5, -3, -3, +5, +5, -3, maka unsur berikutnya adalah 3 diikuti 8.
3. Unsur ke-*n* barisan: 1, -2, 3, -4, 5, -6, ... adalah U_n dengan

   $$U_n = \begin{cases} n & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ -n & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

   Oleh karena itu unsur ke 10 adalah U_{10} = -10.
4. Suku ke-*n* deret: 7 + 2 + 7 + 4 + 7 + 6 + ... adalah U_n dengan

   $$U_n = \begin{cases} 7 & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ n & \text{jika } n \text{ genap.} \end{cases}$$

   Oleh karena itu suku ke 10 dari deret tersebut adalah U_{10} = 10.
5. Barisan 4, 7, 10, 13, ... adalah barisan aritmatika dengan $a = 4$, $b = 3$. Unsur ke *n* dari barisannya adalah $U_n = a + (n-1)b = 4 + 3(n-1)$ atau $U_n = 1+3n$.
6. Barisan $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ adalah barisan geometri dengan $a = \frac{1}{2}$ dan $r = \frac{1}{2}$.

   Unsur ke *n* dari barisannya adalah $U_n = ar^{n-1} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^{n-1} = (\frac{1}{2})^n$.
7. Deret 100 + 95 + 90 + ... adalah deret aritmatika dengan $a = 100$, $b = -5$ Jumlah sepuluh suku pertama deret tersebut adalah

   $$S_{10} = \frac{1}{2}(10)[100 + (9)(-5)] = 5(100 - 45) = 5\ (55) = 275.$$
8. Deret –3 – 6 – 12 – 24 - ... adalah deret geometri dengan $a = -3$, $r = 2$. Jumlah sepuluh suku pertama dari deret tersebut adalah

   $$S_{10} = \frac{(-3)(2^{10} - 1)}{2 - 1} = (-3)(1023) = -3.069.$$

9. $\sum_{i=1}^{4} 2i(i^2 - 2)$ = 2(1)(1 - 2) + 2(2)(4 - 2) + 2(3)(9 - 2) + 2(4)(16 - 2)

= - 2 + 8 + 42 + 112

= 160.

10. Deret $24 + 3 + \frac{3}{8} + \ldots$ adalah deret geometri dengan *a* = 24 dan

$r = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

Oleh karena itu $24 + 3 + \frac{3}{8} + \ldots = S_\infty$ dengan

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

$$= \frac{24}{1 - \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{24}{\frac{7}{8}}$$

$$= (24)\left(\frac{8}{7}\right)$$

$$= \frac{(24)(8)}{7}$$

$$= \frac{192}{7}$$

$$= 27\frac{3}{7}.$$

Jadi $24 + 3 + \frac{3}{8} + \ldots = 27\frac{3}{7}$.

C. PETUNJUK PENILAIAN

Semua soal mempunyai skor sama, yaitu 10. Jadi jika jawaban benar semua, maka mendapat skor 100.

BAB IV. PENUTUP

Setelah menyelesaikan modul ini, anda berhak untuk mengikuti tes praktek untuk menguji kompetensi yang telah anda pelajari. Apabila anda dinyatakan memenuhi syarat kelulusan dari hasil evaluasi dalam modul ini, maka anda berhak untuk melanjutkan ke topik/modul berikutnya.

Mintalah pada guru untuk melakukan uji kompetensi dengan sistem penilaian yang dilakukan langsung oleh pihak industri atau asosiasi yang berkompeten apabila anda telah menyelesaikan seluruh evaluasi dari setiap modul, maka hasil yang berupa nilai dari guru atau berupa portofolio dapat dijadikan bahan verifikasi oleh pihak industri atau asosiasi profesi. Kemudian selanjutnya hasil tersebut dapat dijadikan sebagai penentu standar pemenuhan kompetensi dan bila memenuhi syarat anda berhak mendapatkan sertifikat kompetensi yang dikeluarkan oleh dunia industri atau asosiasi profesi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdul Kodir, dkk., 1980. **Matematika untuk SMA Jilid 10,** Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.Jakarta: PT Intermasa, Jakarta.

Noormandiri, B.K., Endar Sucipto, 1994. **Matematika untuk SMU Jilid 1.** Jakarta: Erlangga, Jakarta.